**Н. Р. Абубакиров, Р. Б. Салимов,
П. Л. Шабалин (Казань)**

ВНЕШНЯЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРИ КОМБИНИРОВАНИИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ В ФОРМЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ И ПОЛЯРНОГО УГЛА

Рассмотрены внешние обратные краевые задачи (ОКЗ) по параметрам x, y и θ, y в односвязной области. Пусть L_z — замкнутый жордановый контур в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, состоящий из двух частей L_z^1 и L_z^2, D_z — область, внешняя к кривой L_z, $w(z)$ — функция, аналитическая в области D_z.

Требуется найти форму контура L_z и функцию $w(z)$, если на нем граничные значения этой функции заданы в виде

$$w = \varphi_1(x) + i\psi_1(x),\ 0 \le x \le a,\ \text{на одной части } L_z^1,$$
$$w = \varphi_2(x) + i\psi_2(x),\ 0 \le x \le a,\ \text{на остальной части } L_z^1, \qquad (1)$$
$$w = \varphi(y) + i\psi(y),\ -b \le y \le b,\ \text{на } L_z^2,$$

причем эти значения в плоскости w определяют замкнутый жордановый контур L_w.

Будем решать эту задачу в постановке Нужина [1], поэтому величину $w_0 = w(\infty)$ в плоскости w фиксируем заранее. После перехода от области D_w к внутренности единичного круга в плоскости ζ решение задачи (1) сводится к нахождению функции $z(\zeta)$ с полюсом в точке $\zeta = 0$, удовлетворяющей краевому условию задачи Гильберта

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(\gamma)} z(e^{i\gamma})] = c(\gamma), \qquad (2)$$

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} -\pi/2, & \gamma \in [0, \gamma_a], \\ -\pi, & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B), \\ -3\pi/2, & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi], \end{cases} \qquad c(\gamma) = \begin{cases} -y(\gamma), & \gamma \in [0, \gamma_A], \\ -x(\gamma), & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B), \\ y(\gamma), & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi], \end{cases}$$

$e^{i\gamma_A}$ и $e^{i\gamma_B}$ – точки единичной окружности, в которые переходят точки стыка дуг L_z^1 и L_z^2.

На основе метода из статьи [2] построена искомая функция

$z(\zeta)$, имеющая вид

$$z(\zeta) = -\frac{i}{2\pi} F_0(\zeta) \int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + iB_0 + C\zeta - \frac{\overline{C}}{\zeta}, \quad (3)$$

где $C = A + iB$, A, B, B_0 — произвольные действительные постоянные, а $F_0(\zeta)$ – решение однородной задачи (2).

ОКЗ по параметрам θ, y отличается от предыдущей только тем, что на части L_z^1 контура L_z значения аналитической функции $w(z)$ заданы в виде

$$w = \varphi_*(\theta) + i\psi_*(\theta),$$

где $\theta = \arg z$. Эта задача также приводится к задаче Гильберта (2) со своими коэффициентами $\nu(\gamma)$ и $c(\gamma)$. Здесь возникают два различных случая.

1) Если $\alpha \leq \theta \leq 2\pi - \beta$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, то функция $z(\zeta)$ имеет вид

$$z(\zeta) = -iF_0(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|} \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + iB_0 \right],$$

$F_0(\zeta)$ обозначает то же, что и выше.

Доказано, что если произвольная вещественная постоянная B_0 удовлетворяет некоторым ограничениям-неравенствам, то искомая область D_z является однолистной.

2) Если $-\beta < \theta < \alpha$, то $z(\zeta)$ выражается формулой (3). Здесь доказан тот факт, что в комплексной плоскости $B_0 + iA$ существует область D_0 такая, что если $(B_0, A) \in D_0$ и B удовлетворяет некоторым ограничениям-неравенствам, то искомая область D_z также является однолистной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г. , Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.

2. Абубакиров Н. Р., Салимов Р. Б. *Новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в*

многосвязной области/ Казанск. ун-т, 1999. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, N 1703-В99.

Ф. Г. Авхадиев (Казань)

ОСОБЕННОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Для функций $f : S^n \to \mathrm{C}$ и параметров $\alpha \in \mathrm{C}$ и $x \in \mathrm{R}^{n+1} \setminus S^n$ рассмотрим сферические потенциалы

$$p_{n,\alpha}(x, f) = \int_{S_n} \frac{f(y)d\sigma_y}{|x-y|^{n+\alpha}}, \qquad (1)$$

где $S^n = \{y \in \mathrm{R}^{n+1} : |y| = 1\}$, $d\sigma_y$ — обычная мера Лебега на сфере S^n, $\omega_n = \int_{S_n} d\sigma_y = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$. Асимптотическое поведение (1) при $|x| \to 1$ хорошо известно. В частности, если $f \in L^\infty(S^n)$ и $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, то интеграл (1) ограничен. Если $f \in L^\infty(S^n)$ и $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, то (1) имеет особенность порядка $O(|1-|x||^{-\mathrm{Re}\,\alpha})$. Мы находим формулу, явно выделяющую эту особенность.

Идею дает тривиальный случай $n = 0$. Для $S^0 = \{-1, 1\}$ аналог (1)

$$p_{0,\alpha}(x, f) = \frac{f(-1)}{|x+1|^\alpha} + \frac{f(1)}{|x-1|^\alpha} \quad (x \in \mathrm{R} \setminus S^0)$$

удовлетворяет тождеству

$$p_{0,\alpha}(x, f) = |1 - x^2|^{-\alpha} p_{0,-\alpha}(x, f \circ T_0), \qquad (2)$$

где $T_0 : S^0 \to S^0$ является инволюцией, т.е. $T_0(\pm 1) = \mp 1$.

Существует аналог формулы (2) для $n \geq 1$.

Теорема. *Пусть $n \geq 1$, $f \in L^1(S^n)$. Для любых $\alpha \in \mathrm{C}$ и $x \in \mathrm{R}^{n+1} \setminus S^n$, $|x| \neq 0$,*

$$\int_{S^n} \frac{f(y)d\sigma_y}{|x-y|^{n+\alpha}} = |1-|x|^2|^{-\alpha} \int_{S^n} \frac{(f \circ T_{n,x})(y)d\sigma_y}{|x-y|^{n-\alpha}}, \qquad (3)$$

где $T_{n,x}$ — инверсия сферы S^n относительно сферы

$$S_x^{n-1} = \{y \in S^n : |y - x| = \sqrt{|1-|x|^2|}\}.$$